Departamento de Matemática Aplicada

IMECC – UNICAMP

Exame de Admissão 2009

Programa de Pós–Graduação em Matemática Aplicada

Código de Identificação:

Questões	*Pontos*
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
Questão 5	
Questão 6	
Questão 7	
Questão 8	
Questão 9	
Questão 10	
T o t a l	

Inicialmente, faça uma leitura com muita atenção do enunciado de todas as questões. Apresente a resolução de somente oito questões, entre as cinco questões de Álgebra Linear e as cinco questões de Cálculo Avançado. Todas as questões têm a mesma pontuação. A prova tem duração de quatro horas.

Boa Prova !

Álgebra Linear

Questão 1. Sejam $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$, e $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ uma solução do sistema linear $Ax = b$, isto é, $A\overline{x} = b$.

(a) Mostre que qualquer outra solução $\widehat{x}$ do sistema linear $Ax = b$ pode ser escrita como $\widehat{x} = \overline{x} + \widetilde{x}$, com $\widetilde{x}$ solução do sistema linear homogêneo $Ax = 0$.

(b) Mostre que qualquer elemento $\widehat{x} = \overline{x} + \widetilde{x}$, com $\widetilde{x}$ solução do sistema linear homogêneo $Ax = 0$, é também uma solução do sistema linear $Ax = b$.

(c) Mostre que o sistema linear $Ax = b$ possui uma única solução se, e somente se, o sistema linear homogêneo $Ax = 0$ possui somente a solução trivial.

(d) Considerando $m = 5$ e $n = 3$, exiba um sistema linear $Ax = b$ que possui infinitas soluções. Justifique sua escolha.

Questão 2. Sejam V um espaço vetorial real e

$$\gamma = \{ v_1 , v_2 , v_3 \}$$

uma base ordenada de V.

(a) Mostre que $\beta = \{ v_1 + v_3 , v_2 + v_3 , v_1 + v_2 \}$ é uma base de V.

(b) Determine a matriz, $[I]^{\beta}_{\gamma}$, de mudança da base ordenada β para a base ordenada γ.

(c) Se o elemento $v \in V$ tem matriz de coordenadas $[v]_{\gamma}$ dada por:

$$[v]_{\gamma} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

determine a matriz de coordenadas do elemento v em relação à base ordenada β.

(d) Determine a matriz, $[I]^{\gamma}_{\beta}$, de mudança da base ordenada γ para a base ordenada β.

Questão 3. Considere o operador linear $T : \mathcal{P}_3(I\!R) \longrightarrow \mathcal{P}_3(I\!R)$ dado por:

$$T(p(x)) = p''(x) + xp'(x) - p(x) \qquad ; \qquad x \in I\!R .$$

(a) Determine a matriz do operador linear T, $[T]_\beta^\beta$, onde β é a base canônica de $\mathcal{P}_3(I\!R)$, isto é, $\beta = \{ 1 , x , x^2 , x^3 \}$.

(b) O operador linear T é injetor? Justifique sua resposta.

(c) Determine os autovalores e os autovetores do operador linear T.

(d) Diga qual é a multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica de cada um dos autovalores do operador T. Justifique sua resposta.

(e) O operador linear T é diagonalizável? Justifique sua resposta.

Questão 4. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$ munido do produto interno usual, que denotamos por $\langle \cdot , \cdot \rangle$, e o elemento $u \in \mathbb{R}^n$ não–nulo. Definimos as aplicações P e Q de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ da seguinte forma:

$$P(v) = \frac{\langle u , v \rangle}{\langle u , u \rangle} u \qquad \text{e} \qquad Q(v) = v - 2P(v)$$

para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

(a) Mostre que P e Q são operadores lineares sobre $\mathbb{R}^n$.

(b) Mostre que $P(w) = w$, com $w = \alpha u$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) Mostre que $P(w) = 0_{\mathbb{R}^n}$ para $\langle u , w \rangle = 0$.

(d) Mostre que $Q(w) = -w$, com $w = \alpha u$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

(e) Mostre que $Q(w) = w$ para $\langle u , w \rangle = 0$.

(f) Dê uma interpretação geométrica para os operadores lineares P e Q.

Questão 5. Determine explicitamente a expressão do operador linear T sobre $I\!R^4$, diagonalizável, que satisfaz simultaneamente as seguintes condições:

1. $Ker(T) = \{ (x, y, z, t) \in I\!R^4 \ / \ x - y - z + t = 0 \quad \text{e} \quad z - t = 0 \}$.

2. $Im(T) = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0)]$.

3. $\lambda = 2$ é um autovalor de T com multiplicidade algébrica igual a 2.

Determine uma base γ para o espaço vetorial $I\!R^4$ de modo que a matriz o operador linear T, $[T]_\gamma^\gamma$, seja uma matriz diagonal.

Questão 6. Considere a função $F : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ cuja regra funcional é dada por:

$$F(x,y) \;=\; x^2 \,+\, 2xy^2 \,-\, 4x \,+\, y^2 \;.$$

(a) Determine os pontos críticos da função F, fazendo a classificação.

(b) Determine a equação da reta normal e a equação do plano tangente à superfície contida em $I\!R^3$, dada pela equação $F(x,y) - z = 0$ no ponto $P = (1,2,9)$.

(c) Determine os pontos de máximo e de mínimo da função F sobre o subconjunto $S \subset I\!R^2$ dado por:

$$S \;=\; \left\{ (x,y) \in I\!R^2 \;/\; y^2 - x = 0 \quad \text{para} \quad x \in [0,1] \right\} ,$$

apresentando graficamente suas localizações no plano numérico $I\!R^2$, juntamente com o gráfico do subconjunto S.

(d) Dado um ponto genérico $(x,y) \in I\!R^2$, determine a direção $\vec{\eta}$ para a qual a função F tem a maior taxa de variação nesse ponto, em seguida, calcule o valor dessa taxa no ponto $(-1,1) \in I\!R^2$.

Questão 7. Considere o seguinte Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = \theta\, x(t)(\,\sigma \;-\; x(t)\,)(\,\mu \;-\; x(t)\,)^2 \\[2ex] x(0) = x_0 \end{cases}$$

com os parâmetros θ, σ e μ estritamente positivos e o estado inicial x_0 não–negativo.

(a) Esboce o gráfico da função

$$F(x) \;=\; \theta\, x(\,\sigma \;-\; x\,)(\,\mu \;-\; x\,)^2 \;,$$

para todo $x \geq 0$, e em seguida determine as soluções estacionárias (soluções de equilíbrio), classificando–as quanto à estabilidade.

(b) Esboce o gráfico da solução do Problema de Valor Inicial, considerando

$$(1) \quad \theta = 0.25 \quad , \quad \sigma = 1.0 \quad , \quad \mu = 3.0 \quad \text{e} \quad x(0) = 2.0$$

e

$$(2) \quad \theta = 0.25 \quad , \quad \sigma = 1.0 \quad , \quad \mu = 3.0 \quad \text{e} \quad x(0) = 4.0$$

no mesmo sistema de eixos coordenados.

Questão 8. Considere a seqüência numérica $\{ a_n \}_{n=1}^{\infty}$ definida por:

$$a_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad a_{n+1} = a_n \left(2 - \frac{a_n}{2} \right) \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \cdots .$$

(a) Mostre que $1 \leq a_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que $a_{n+1} \geq a_n$.

(c) Mostre que a seqüência numérica $\{ a_n \}_{n=1}^{\infty}$ converge para o ponto $\overline{a} = 2$.

Questão 9. Considere um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Determine a área da região $R \subset \Omega$ limitada pela curva Γ definida pela seguinte equação:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \,,$$

através do *Teorema de Green*

$$\oint_{\Gamma} (\, Pdx + Qdy \,) = \iint_{R} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \,,$$

onde as funções P e Q são contínuas em Ω, possuindo também derivadas parciais primeiras contínuas.

Questão 10. Considere a Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem Não–Linear

$$-u''(x) \;=\; \exp(\lambda^2 u(x)) \qquad \text{para} \qquad x \in (0,1)\,, \tag{1}$$

com $\lambda \in I\!R$ não–nulo, sujeita a condição de contorno

$$u(0) \;=\; 0 \qquad \text{e} \qquad u(1) \;=\; 0\,. \tag{2}$$

(a) Mostre que a solução u^* do Problema de Valor de Contorno (1)–(2) possui um único ponto crítico em $[0,1]$. Classifique esse ponto crítico.

(b) Tomando o polinômio de Taylor de Primeira Ordem da função

$$F(u) \;=\; \exp(\lambda^2 u)$$

em torno ponto $u = 0$, que vamos denotar por $P(u)$, determine a solução do Problema de Valor de Contorno

$$\begin{cases} -U''(x) \;=\; P(U(x)) \qquad \text{para} \qquad x \in (0,1) \\ U(0) \;=\; 0 \quad e \quad U(1) \;=\; 0 \end{cases}$$

que é uma aproximação para a solução u^* do PVC (1)–(2).