Exame de Qualificação em Matrizes - 07/08/2013

Questão 1

a) Considere $A : m \times n$, posto$(A) = n$. Demonstre que $\|(A^tA)^{-1}\|_2 = \|A^\dagger\|_2^2$. (Inclua as demonstrações de propriedades e/ou teoremas que forem citados nesta demonstração.)

b) $A : n \times n$ é idempotente se $A^2 = A$. Demonstre que uma matriz idempotente é a Identidade de ordem n ou é uma matriz singular.

c) Considere a matriz $A : n \times n$ e a matriz $G : n \times n$, $G = I_n - ge_k^t$, onde $g : n \times 1$ é tal que: $g_i = 0$, $1 \leq i \leq k$. Se $B = AG$, obtenha a a relação entre os elementos a_{ij} e b_{ij} sem realizar explicitamente o produto.

Questão 2: Considere a matriz $A : m \times n$, $m > n$, e sua decomposição SVD. Particionando as matrizes U, D e V por $U = [U_s\ U_t]$, $D = [D_s\ 0;\ 0\ 0]$ e $V = [V_s, V_w]$.

Para $b \in \mathbb{R}^m$, considere o problema de quadrados mínimos: $\min \|b - Ax\|_2$.

a) Quais os valores de s, t, w em função das dimensões e posto de A? Justifique.

b) Relacione as matrizes U_s, U_t, V_s, V_w com os 4 subespaços fundamentais: imagem e núcleo de A e de A^t.

c) Demonstre que as soluções para o problema de quadrados mínimos são da forma:

$y = V_s(D_s)^{-1}(U_s)^tb + V_wz \quad z \in \mathbb{R}^w$.

d) Explique o que representa a solução y de norma–2 mínima para o problema de quadrados mínimos. Qual a representação desta solução de acordo com a notação do item (b). Justifique.

e) A solução y para o problema de QM pode ser única? Justifique.

f) O valor mínimo de $\min \|b - Ax\|_2$ pode ser nulo? Justifique.

Escolha 2 questões entre as questões 3, 4 e 5:

Questão 3: Considere $A : n \times n$, simétrica e não singular e sua fatoração $A = LDL^t$ onde L é triangular inferior com diagonal unitária e D diagonal. Considere a matriz M tal que $LDL^t = MD^{-1}M^t$.

a) Deduza expressão da matriz M em função das matrizes L e D. Qual e estrutura da matriz M?

b) Escreva os elementos da matriz M em função dos elementos de A de modo que a fatoração $MD^{-1}M^t$ possa ser obtida diretamente de A, isto é, sem calcular a matriz L.

Questão 4: Considere $A = uv^t$ onde $u : m \times 1$ e $v : n \times 1$ ambos com norma–2 igual a 1 e com todas entradas positivas.

a) Sabendo que $Q_1 = I - (2/(s^ts))ss^t$ é a matriz de Householder para realizar a primeira etapa do processo da fatoração QR, explicite cada entrada do vetor s e dê uma expressão para $2/(s^ts)$ em função dos vetores u e v e/ou de suas entradas.

b) Quantas etapas do processo de Householder devem ser realizadas para triangularizar a matriz A? Justifique.

c) Qual a estrutura especial da matriz R? Justifique.

Questão 5: Considere o subespaço de Krylov $\mathcal{K}_j(A, b)$ e a relação $AV_j = V_jH_j + H_{j+1,j}v_{j+1}e_j^t$.

a) Escreva o pseudo-código do Método de Arnoldi baseado na relação acima.

b) Explique como este método pode ser utilizado para aproximar autopares da matriz A.

c) Comente o erro cometido na aproximação dos autovalores.

d) O que significa reinicialização nesse contexto?