MT404 – MÉTODOS COMPUTACIONAIS DE ÁLGEBRA LINEAR – 2º SEM/2012
PROVA 2

1. Seja $A : n\times n$, simétrica, definida positiva e banda com amplitude $2p+1$ (ou seja, $a_{ij} = 0$ se $i > j+p$, ou, pela simetria, se $j > i+p$). Considere sua fatoração de Cholesky $A = GG^T$, onde $G : n \times n$ é matriz triangular inferior, com diagonal positiva.
(a) Mostre que o fator de Cholesky G tem banda inferior de largura p.
(b) Escreva um algoritmo para obter G, armazenando–o na parte triangular inferior de A e levando em conta sua estrutura.
Lembrete: Se $B = GG^T$ é a fatoração de Cholesky de $B : n\times n$, matriz simétrica definida positiva, então: $g_{kk} = \sqrt{b_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} g_{kj}^2}$; $g_{ik} = (b_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} g_{kj}g_{ij})/g_{kk}$, $k = 1,\cdots,n$; $i = k+1,\cdots,n$.

2. Mostre que, se
$$A = \begin{pmatrix} R & w \\ 0 & v \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$
onde A é uma matriz $m \times n$, com posto–coluna completo, R é uma matriz $k \times k$, w e c são vetores de k posições, e v e d com $m-k$ componentes, com $k = n-1$; então
$$Min\|Ax - b\|_2^2 = \|d\|_2^2 - (\frac{v^T d}{\|v\|_2})^2.$$

3. Considere a matriz de reflexão de Householder $H = I - \beta vv^T$, onde:
$\beta = 1/(\|x\|_2[\|x\|_2 + |x_1|])$, $v = x + \sigma e_1, \sigma = sign(x_1)\|x\|_2$, x e e_1 são vetores de $I\!R^n$ e $e_1 = (1;0;.\cdots.0)^T$.
(a) Sejam H a reflexão que transforma $(\,3 \;\; 0 \;\; -4\,)^T$ em $(\,-\sigma \;\; 0 \;\; 0)^T$, e $a = (\,1 \;\; 1 \;\; 1\,)^T$. Determine Ha de forma eficiente.
(b) Suponha que, conhecido x, foram calculados β e v. Descreva os passos para que, dado $y \in I\!R^n$, obtenha–se o produto $HDHy$ da forma mais eficiente possível, onde $D \in I\!R^{n\times n}$ é uma matriz diagonal. Qual o número de operações gasto pelo seu procedimento? Justifique.

4. Seja $A \in I\!R^{m\times n}$. Escreva sobre a decomposição SVD de A (definição , propriedades, aplicações) e sobre A^+, a pseudo–inversa de A.