MT404 – MÉTODOS COMPUTACIONAIS DE ÁLGEBRA LINEAR – 2º SEM/2012
PROVA 1

1. (a) Se x e y são vetores de R^n, mostre que

$$|x^T y| \leq ||x||_\infty \, ||y||_1.$$

Para que vetores $y \in R^n$, $|x^T y| = ||x||_\infty$?

(b) Seja $A \in R^{m\times n}$. Prove que $||A||_2 \leq ||A||_F$.

2. Seja $A \in I\!R^{n\times n}$ matriz banda, com banda inferior p e banda superior q. A pode ser armazenada, pelas suas diagonais, em uma matriz B, de dimensão $(p+q+1)\times n$ tal que: $a_{ij} = B(i-j+q+1, j)$, para todo i, j "dentro da banda". **Usando este armazenamento,**

(a) reescreva $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3.5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0.5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$;

(b) escreva um algoritmo que implemente o produto $Ax = y$, onde $A, x \in I\!R^n, p$ e q são conhecidos.

3. Sejam $u, v \in I\!R^n$ e considere a matriz $A = I + uv^T$.
(a) Mostre que $AB = BA = I$, isto é $B = A^{-1}$, onde

$$B = I - \frac{uv^T}{1 + u^T v}.$$

Se $u = (0\ 1000\ 100)^T$ e $v = (10\ 0.1\ -0.01)^T$:
(b) calcule $cond_1(A)$;
(c) na resolução do sistema linear $Ax = b$, onde $b = (1\ 10.1\ -1)^T$, obteve-se a norma do resíduo igual a $1.01 * 10^{-5}$. Qual o limitante superior para o erro relativo neste caso? A partir deste resultado, o que você pode esperar da precisão da solução obtida?

4. Seja $\alpha \in I\!R$ e considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$.

(a) Exiba os fatores L e U de A e determine os valores de α para os quais a decomposição LU de A não existe. Justifique sua resposta.
(b) **Usando a fatoração** LU **de** A, para que valores de α você pode garantir que esta fatoração é única?