MT402 - Prova No. 2 - Aurelio Oliveira - 25/06/13

Resolva somente quatro dos cinco exercícios abaixo.

1. Uma matriz A é chamada normal se $AA^t = A^tA$.

   (a) Mostre que matrizes diagonais, simétricas, antisimétricas ($A^t = -A$) e ortogonais são matrizes normais.

   (b) Mostre que se A é normal e $A = QBQ^t$ com Q ortogonal, então B é normal.

   (c) Mostre que se T é triangular e normal, então T é diagonal.

   (d) Mostre que A é normal se e somente se A é ortogonalmente similar a uma matriz diagonal.

2. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   (a) Aplique o método das potências a esta matriz partindo de e_1. O método converge? Porque?

   (b) Repita o item anterior para o método das potências inversas e shift de Rayleigh. O método converge? Porque?

3. Considere a decomposição RQ onde uma matriz A é decomposta em $A = RQ$ com R triangular superior e Q ortogonal. Desenvolva o método RQ com ***shift*** para encontrar todos os autovalores e autovetores de A. Explique como seria uma implementação eficiente desse método,

4. Escreva $K_F(A)$ em função dos valores singulares da matriz A.

5. Considere o subspaço de Krylov $\mathcal{K}_j(A, b)$ e a relação $AV_j = V_jH_j + H_{j+1,j}v_{j+1}e_j{}^t$. Mostre que:

$$\min \|b - (AK_j)x\| = \min \| \|b\|e_1 - \tilde{H}y\|,$$

   onde $AV_j = V_{j+1}\tilde{H}_j$ e K_j é a matriz onde cada coluna i é dada por $A^{i-1}b$. Qual o valor de x e do resíduo?