MT402 - Prova No. 2 - Aurelio Oliveira - 03/07/12

Resolva somente quatro dos cinco exercícios abaixo.

1. Considere a matriz quadrada A de dimensão n com autovalores distintos: $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$ e autovalores associados v_i. Considere o vetor $q = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i$. O que acontece com os métodos das potências quando usamos q como vetor inicial? (Observe que o primeiro termo do somatório tem índice 2).

   Opine o que poderia ocorrer com suas conclusões do item acima na presença de erros de arrendodamento.

2. Considere a matriz não singular A particionada da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

   onde A_{11} e A_{22} são matrizes quadradas. Seja $A = QR$ e $A^{(1)} = RQ$. Considere as matrizes ortogonal Q, triangular superior R e $A^{(1)}$ particionadas de forma equivalente. Mostre que $A^{(1)}_{21} = 0$ e que Q_{11} e Q_{22} são ortogonais. Mostre também que $A_{11} = Q_{11}R_{11}$, $A_{22} = Q_{22}R_{22}$, $A^{(1)}_{11} = R_{11}Q_{11}$ e que $A^{(1)}_{22} = R_{22}Q_{22}$.

   Em que contexto do curso estes resultados são úteis?

3. Seja o sistema linear $Ax = b$, $A : m \times n$, $m > n$, posto$(A) = n$. Analise a relação entre a solução de Quadrados Mínimos:
   (i) usando decomposição SVD de A e
   (ii) através da decomposição QR de A.

4. Seja a decomposição SVD de uma matriz $A = U\Sigma V^t$ de dimensão $n \times m$, posto$(A)= m$.

   (a) Escreva A^t, AA^t e A^tA em termos de $U\Sigma V^t$.

   (b) Encontre a decomposição SVD das matrizes $(A^tA)^{-1}$, $(A^tA)^{-1}A^t$, $A(A^tA)^{-1}$ e $A(A^tA)^{-1}A^t$ em função da decomposição SVD de A.

   (c) Encontre a norma-2 das matrizes do item anterior.

   (d) Suponha que A seja quadrada e não singular. Como você resolveria o sistema linear $Ax = b$ utilizando $U\Sigma V^t$?

5. Justifique a utilização de métodos iterativos para a solução de sistemas lineares em oposição a métodos diretos.