Departamento de Matemática Aplicada

IMECC - UNICAMP

Exame de Admissão 2010

Programa de Pós–Graduação em Matemática Aplicada

Código de Identificação:

Questões	*Pontos*
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
Questão 5	
Questão 6	
Questão 7	
Questão 8	
Questão 9	
Questão 10	
T o t a l	

Inicialmente, faça uma leitura com muita atenção do enunciado de todas as questões. Apresente a resolução de somente oito questões, dentre as cinco questões de Álgebra Linear e as cinco questões de Cálculo Avançado. Todas as questões têm a mesma pontuação. A prova tem duração de quatro horas.

Boa Prova !

Álgebra Linear

Questão 1. Considere o subespaço U do espaço vetorial real $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, dos polinômios com coeficientes reais de grau ≤ 3, definido da forma:

$$U = \{ \, p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \;/\; p(-1) + p'(-1) = 0 \quad \text{e} \quad p(1) = 0 \, \},$$

e o subespaço S do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ definido da forma:

$$S = \{ \, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x - y + z = 0 \, \}.$$

(a) Determine uma base para o subespaço U.

(b) Se possível, exiba um isomorfismo de U em S. Justifique sua resposta.

Questão 2. Diga se é **F**alsa ou **V**erdadeira cada uma das afirmações abaixo, justificando sua resposta.

(a) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que é injetora.

(b) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ que é sobrejetora.

(c) Subconjuntos de um conjunto linearmente dependente são linearmente dependentes.

(d) Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita, com $dim(V) = n$, U e W subespaços de V com $dim(U) > \frac{n}{2}$ e $dim(W) > \frac{n}{2}$. Então, $U \cap W = \{ 0_V \}$.

Definição 1 *Seja* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *uma matriz simétrica. Dizemos que* A *é positiva–definida se*

$$x^t A x > 0$$

para todo elemento $x \in \mathbb{R}^n$ *não nulo.*

Questão 3. Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz positiva–definida e uma matriz $B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$, com $n \geq p$ e $posto(B) = p$.

(a) Mostre que $C = B^t A B$ é uma matriz positiva–definida.

(b) Mostre que os autovalores da matriz A são todos positivos.

(c) Mostre que a equação $x^t A x = 1$ representa um hiper–elipsóide em $\mathbb{R}^n$ com centro na origem e semi–eixos nas direções dos autovetores $q_1, \cdots, q_n$ associados aos autovalores $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ da matriz A.

Questão 4. Considere o espaço vetorial real $I\!R^4$ munido do produto interno usual, que denotamos por $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Sejam o subespaço S do espaço vetorial real $I\!R^4$ definido da forma:

$$S = \{ (x, y, z, t) \in I\!R^4 \ / \ 2x - z + t = 0 \ \text{ e } \ z + t = 0 \},$$

o subespaço $S^\perp$, que é o complemento ortogonal de S em $I\!R^4$ com relação ao produto interno usual, e $P : I\!R^4 \longrightarrow I\!R^4$ o operador de projeção ortogonal sobre o subespaço S.

(a) Determine uma base ortogonal para o subespaço S.

(b) Determine uma base ortogonal para o subespaço $S^\perp$.

(c) Determine os autovalores e os autovetores do operador de projeção ortogonal P.

(d) O operador linear P é diagonalizável? Justifique sua resposta.

Questão 5. Sejam $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *matrizes similares*, isto é, existe uma matriz invertível $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ de maneira que $A = PBP^{-1}$.

(a) Mostre que as matrizes A e B possuem os mesmos autovalores.

(b) Determine a relação entre os autovetores das matrizes A e B.

(c) Mostre que se a matriz A é diagonalizável, então a matriz B é diagonalizável.

Questão 6. Considere uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \leq c \\ ax + b & \text{se} \quad x > c \end{cases}$$

para a, b, c constantes. Por simplicidade, considere c uma constante positiva.

(a) Determine as constantes a e b em termos da constante c de modo que $f'(c)$ exista.

(b) Faça um esboço do gráfico da função f.

Questão 7. Seja $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ uma função duas vezes continuamente diferenciável, isto é, f, f' e f'' contínuas em $I\!R$. Determine o valor de $f(0)$, sabendo que $f(\pi) = 2$ e que

$$\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \sin(x) dx = 5 .$$

Questão 8. Determine todos os pontos de máximo e de mínimo locais e os pontos de sela da função $F(x,y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ no domínio $\Omega \subset I\!R^2$ definido por:

$$\Omega = \{ (x,y) \in I\!R^2 \ / \ x > 0 \ \text{ e } \ |y| < 2x \} .$$

Questão 9. Determine a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x'(t) &= -5x(t) \\ y'(t) &= \qquad\quad - 4y(t) + 3z(t) \\ z'(t) &= \qquad\quad + 3y(t) - 4z(t) \end{cases}$$

com a condição inicial

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Faça a classificação quanto a estabilidade da solução estacionária. Justifique sua resposta.

Questão 10. A equação diferencial

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - n^2) y(x) = 0$$

é denominada *equação de Bessel de ordem* n. Mostre que a *função de Bessel de primeira espécie de ordem zero* definida por:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{4^k (k!)^2}$$

é a solução da equação de Bessel para $n = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.