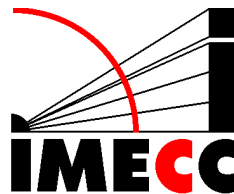

EXAME PARA BOLSA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

CÓDIGO		NOTA	

A1	
A2	
A3	
A4	
A5	



C1	
C2	
C3	
C4	
C5	

C1 Seja a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \text{ é racional,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostre que $f(x)$ é derivável em $x = 0$.

C2 Obtenha a equação paramétrica da reta tangente à curva interseção das superfícies definidas localmente pelas equações $x^3 + 2xyz - yz^2 = -1$ e $2y^2 + 5x^2z + xz^2 = -6$, no ponto $(-1, 0, -1)$.

C3 Ache uma curva orientada simples fechada C no plano xy tal que o valor da integral de linha

$$\int_C (y^3 - y)dx - 2x^3 dy$$

seja máximo.

C4 (a) Mostre que, se $n > 3$, então $2^n < n!$.

(b) Usando o item (a), mostre que $2 < e < 3$, onde e é a constante de Euler.

Sugestão: utilize uma expansão em série de Taylor da função exponencial de base e . Neste caso, calcule o raio de convergência da série.

C5 Use a definição de integral por somas de Riemann para mostrar que a área de um triângulo retângulo é a metade do produto dos seus catetos. Forneça uma interpretação geométrica.

A1 Mostre que $\text{posto}(A^T A) = \text{posto}(A)$.

A2 Sejam $A, B : V \rightarrow V$ operadores lineares. Se $AB = BA$, prove que $N(B)$ e $Im(B)$ são subespaços invariantes por A .

A3 Seja $d_1d_2/d_3d_4/d_5d_6$ a data do seu nascimento no formato DD/MM/AA. Construa a matriz $[T]$ (base canônica no domínio e no contra-domínio) de um operador linear T sobre o espaço vetorial \mathbb{R}^3 , munido do produto interno canônico, que satisfaça **todas** as condições abaixo:

1. T não é diagonalizável.
2. T não é injetora.
3. $\lambda = d_6 + 1$ é autovalor de T .
4. Os autoespaços de T são ortogonais.
5. $(1, 0, 0) \in Im(T)$.

Justifique sua construção.

A4 Aponte o(s) erro(s) e corrija:

(a) O vetor $(1, 1, 1)$ gera o espaço linha da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Portanto o espaço nulo

de A é o \mathbb{R}^2 .

(b) Seja $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a matriz cujas colunas são os autovetores de A associados aos autovalores -3 e 5 , respectivamente. Se $D = \text{diag}(-3, 5)$, então $A = PDP^T$.

A5 Classifique cada afirmação como verdadeira ou falsa. **Justifique.**

- (a) Se A é uma matriz $m \times n$ tal que o sistema $Ax = b$ tem solução, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}^m$, então existe C , matriz $n \times m$, tal que $AC = I$.
- (b) Sejam v^1 e v^2 dois vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^n e seja $p \in \mathbb{R}^n$. Considere o plano $Q = \{p + tv^1 + uv^2 \mid t, u \in \mathbb{R}\}$. Se T é um operador linear injetor sobre \mathbb{R}^n , então $T(Q)$, a imagem de Q por T , é um plano que contém p , paralelo a $T(v^1)$ e $T(v^2)$.
- (c) Se A e B , matrizes quadradas de ordem n , são semelhantes, então A e B têm os mesmos autovalores.
- (d) Seja A matriz 2×2 não nula, tal que $A^2 = 0$. Então $\det(cI - A) = c^2$, para qualquer c real.