EXAME PARA BOLSA

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

CÓDIGO		NOTA	

A1	
A2	
A3	
A4	
A5	

C1	
C2	
C3	
C4	
C5	

DEZEMBRO 2007

$\boxed{\textbf{C1}}$ Seja a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \text{ é racional,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostre que $f(x)$ é derivável em $x = 0$.

$\boxed{\textbf{C2}}$ Obtenha a equação paramétrica da reta tangente à curva interseção das superfícies definidas localmente pelas equações $x^3 + 2\,x\,y\,z - y\,z^2 = -1$ e $2\,y^2 + 5\,x^2\,z + x\,z^2 = -6$, no ponto $(-1, 0, -1)$.

$\boxed{\textbf{C3}}$ Ache uma curva orientada simples fechada C no plano xy tal que o valor da integral de linha

$$\int_C (y^3 - y)dx - 2x^3 dy$$

seja máximo.

$\boxed{\textbf{C4}}$ (a) Mostre que, se $n > 3$, então $2^n < n!$.

(b) Usando o item (a), mostre que $2 < e < 3$, onde e é a constante de Euler.

Sugestão: utilize uma expansão em série de Taylor da função exponencial de base e. Neste caso, calcule o raio de convergência da série.

$\boxed{\textbf{C5}}$ Use a definição de integral por somas de Riemann para mostrar que a área de um triângulo retângulo é a metade do produto dos seus catetos. Forneça uma interpretação geométrica.

$\boxed{\textbf{A1}}$ Mostre que posto$(A^T A) =$ posto(A).

$\boxed{\textbf{A2}}$ Sejam $A, B : V \to V$ operadores lineares. Se $AB = BA$, prove que $N(B)$ e $Im(B)$ são subespaços invariantes por A.

$\boxed{\textbf{A3}}$ Seja $d_1d_2/d_3d_4/d_5d_6$ a data do seu nascimento no formato DD/MM/AA. Construa a matriz $[T]$ (base canônica no domínio e no contra-domínio) de um operador linear T sobre o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, munido do produto interno canônico, que satisfaça **todas** as condições abaixo:

1. T não é diagonalizável.
2. T não é injetora.
3. $\lambda = d_6 + 1$ é autovalor de T.
4. Os autoespaços de T são ortogonais.
5. $(1, 0, 0) \in Im(T)$.

Justifique sua construção.

$\boxed{\textbf{A4}}$ Aponte o(s) erro(s) e corrija:

(a) O vetor $(1,1,1)$ gera o espaço linha da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Portanto o espaço nulo de A é o $\mathbb{R}^2$.

(b) Seja $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a matriz cujas colunas são os autovetores de A associados aos autovalores -3 e 5, respectivamente. Se $D = \operatorname{diag}(-3,5)$, então $A = PDP^T$.

$\boxed{\textbf{A5}}$ Classifique cada afirmação como verdadeira ou falsa. **Justifique.**

(a) Se A é uma matriz $m \times n$ tal que o sistema $Ax = b$ tem solução, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}^m$, então existe C, matriz $n \times m$, tal que $AC = I$.

(b) Sejam v^1 e v^2 dois vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$ e seja $p \in \mathbb{R}^n$. Considere o plano $Q = \{p + t\,v^1 + u\,v^2 \mid t,\, u \in \mathbb{R}\}$. Se T é um operador linear injetor sobre $\mathbb{R}^n$, então $T(Q)$, a imagem de Q por T, é um plano que contém p, paralelo a $T(v^1)$ e $T(v^2)$.

(c) Se A e B, matrizes quadradas de ordem n, são semelhantes, então A e B têm os mesmos autovalores.

(d) Seja A matriz 2×2 não nula, tal que $A^2 = 0$. Então $\det(cI - A) = c^2$, para qualquer c real.