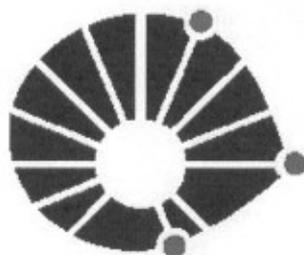


EXAME DE INGRESSO — BOLSAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

CÓDIGO		NOTA	
--------	--	------	--



T1	
T2	
T3	
T4	
T5	
T6	



A1	
A2	
C1	
C2	

As respostas aos testes T1–T6 devem ser justificadas

T1 Se A e B são matrizes quadradas não nulas tais que $AB = 0$ (matriz nula) então:

- (a) $A = 0$ ou $B = 0$.
- (b) A e B são singulares.
- (c) $A = 0$ e $B = 0$.
- (d) Nada podemos afirmar.

T2 Sejam $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_1 - x_3 = 0\}$ e $T \subset \mathbb{R}^4$ um subespaço tal que $S + T = \mathbb{R}^4$. Considere as seguintes afirmações:

- I. As dimensões de S e T são 3 e 1, respectivamente.
- II. A dimensão de $S \cap T$ pode ser 1.
- III. A dimensão de $S \cap T$ pode ser 2.

Está correto o que se afirma em:

- (a) I, apenas.
- (b) II, apenas.
- (c) II e III, apenas.
- (d) I, II e III.

T3 Para todo natural n , $n^3 - n$ é um número:

- (a) divisível por 3.
- (b) ímpar.
- (c) múltiplo de 9.
- (d) primo.

T4 Complete a afirmação: “Se uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$ então f possui _____ neste intervalo”.

- (a) uma descontinuidade.
- (b) um ponto crítico.
- (c) um zero.
- (d) uma inflexão.

T5 Sejam A e B duas matrizes quadradas de mesma ordem e semelhantes, isto é, existe uma matriz não singular T tal que $TB = AT$. Qual das proposições abaixo é falsa?

- (a) A e B têm o mesmo traço.
- (b) Os autovalores de A e B são os mesmos.
- (c) O determinante de T é diferente de zero.
- (d) A e B têm o mesmo determinante.

T6 [*Teorema do Valor Médio*] Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Considere as seguintes afirmações:

I. Existe $d \in (a, b)$ tal que a tangente ao gráfico de f em $x = d$ é paralela ao segmento de reta que une as extremidades do gráfico em $x = a$ e $x = b$.

II. Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é constante em (a, b) .

III. Se $f(a) = f(b)$ então $f'(p) = 0$ para algum $p \in (a, b)$.

Está correto o que se afirma em:

- (a) I, apenas.
- (b) II, apenas.
- (c) I e III, apenas.
- (d) I, II e III.

A1 Sejam u , v e w vetores em \mathbb{R}^n , linearmente independentes. Determine todos os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais $\lambda u + v$, $u + \lambda v + w$ e $\lambda u + v + \lambda w$ sejam linearmente independentes.

A2 Seja A uma matriz quadrada de ordem 2 com dois autovalores reais e distintos, λ e μ , e considere os conjuntos $L = \{Ax - \lambda x \mid x \in \mathbb{R}^2\}$ e $U = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax = \mu x\}$.

(a) Mostre que L e U são subespaços vetoriais de \mathbb{R}^2 .

(b) Mostre que $L \subset U$.

C1 Considere uma função de duas variáveis, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciável, e seja $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto de mínimo local de f .

(a) A condição

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

é necessária ou suficiente?

(b) Analise o ponto $(0, \pi) \in \mathbb{R}^2$ em relação à função

$$f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} y + x \operatorname{sen} 2y.$$

C2 [Teorema de Green] Seja \mathcal{D} um domínio do plano xy e seja \mathcal{C} uma curva simples, fechada, lisa por partes, contida em \mathcal{D} e cujo interior também está em \mathcal{D} . Sejam as funções $P = P(x, y)$ e $Q = Q(x, y)$ definidas e contínuas em \mathcal{D} , possuindo derivadas parciais primeiras contínuas. Nestas condições vale

$$\oint_{\mathcal{C}} P \, dx + Q \, dy = \int_{\mathcal{R}} \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy,$$

onde \mathcal{R} é a região fechada limitada por \mathcal{C} .

(a) Calcule

$$\oint_{\mathcal{C}} y\sqrt{xy} \, dx + x(1 + \sqrt{xy}) \, dy,$$

onde \mathcal{C} é uma curva qualquer satisfazendo as condições acima.

(b) Justifique por que o teorema de Green não pode ser aplicado à integral

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{y \, dx - x \, dy}{x^2 + y^2},$$

onde \mathcal{C} é o quadrado de vértices em $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ e $(0, -1)$.