EXAME DE INGRESSO — BOLSAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

CÓDIGO		NOTA	

T1	
T2	
T3	
T4	
T5	
T6	

A1	
A2	
C1	
C2	

As respostas aos testes T1–T6 devem ser justificadas

DEZEMBRO 2006

$\boxed{\textbf{T1}}$ Se A e B são matrizes quadradas não nulas tais que $AB = 0$ (matriz nula) então:

(a) $A = 0$ ou $B = 0$.
(b) A e B são singulares.
(c) $A = 0$ e $B = 0$.
(d) Nada podemos afirmar.

$\boxed{\textbf{T2}}$ Sejam $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_1 - x_3 = 0\}$ e $T \subset \mathbb{R}^4$ um subespaço tal que $S + T = \mathbb{R}^4$. Considere as seguintes afirmações:

I. As dimensões de S e T são 3 e 1, respectivamente.

II. A dimensão de $S \cap T$ pode ser 1.

III. A dimensão de $S \cap T$ pode ser 2.

Está correto o que se afirma em:

(a) I, apenas.

(b) II, apenas.

(c) II e III, apenas.

(d) I, II e III.

$\boxed{\textbf{T3}}$ Para todo natural n, $n^3 - n$ é um número:

(a) divisível por 3.

(b) ímpar.

(c) múltiplo de 9.

(d) primo.

$\boxed{\textbf{T4}}$ Complete a afirmação: "Se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$ então f possui ____________ neste intervalo".

(a) uma descontinuidade.

(b) um ponto crítico.

(c) um zero.

(d) uma inflcxão.

$\boxed{\textbf{T5}}$ Sejam A e B duas matrizes quadradas de mesma ordem e semelhantes, isto é, existe uma matriz não singular T tal que $TB = AT$. Qual das proposições abaixo é falsa?

(a) A e B têm o mesmo traço.

(b) Os autovalores de A e B são os mesmos.

(c) O determinante de T é diferente de zero.

(d) A e B têm o mesmo determinante.

$\boxed{\textbf{T6}}$ [*Teorema do Valor Médio*] Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Considere as seguintes afirmações:
I. Existe $d \in (a, b)$ tal que a tangente ao gráfico de f em $x = d$ é paralela ao segmento de reta que une as extremidades do gráfico em $x = a$ e $x = b$.
II. Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é constante em (a, b).
III. Se $f(a) = f(b)$ então $f'(p) = 0$ para algum $p \in (a, b)$.
Está correto o que se afirma em:
(a) I, apenas.
(b) II, apenas.
(c) I e III, apenas.
(d) I, II e III.

$\boxed{\textbf{A1}}$ Sejam u, v e w vetores em $I\!R^n$, linearmente independentes. Determine todos os valores de $\lambda \in I\!R$ para os quais $\lambda u + v$, $u + \lambda v + w$ e $\lambda u + v + \lambda w$ sejam linearmente independentes.

$\boxed{\textbf{A2}}$ Seja A uma matriz quadrada de ordem 2 com dois autovalores reais e distintos, λ e μ, e considere os conjuntos $L = \{Ax - \lambda x \mid x \in \mathbb{R}^2\}$ e $U = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax = \mu x\}$.

(a) Mostre que L e U são subcspaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$.

(b) Mostre que $L \subset U$.

$\boxed{\textbf{C1}}$ Considere uma função de duas variáveis, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável, e seja $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto de mínimo local de f.

(a) A condição

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

é necessária ou suficiente?

(b) Analise o ponto $(0, \pi) \in \mathbb{R}^2$ em relação à função

$$f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} y + x \operatorname{sen} 2y.$$

$\boxed{\textbf{C2}}$ [*Teorema de Green*] Seja $\mathcal{D}$ um domínio do plano xy e seja $\mathcal{C}$ uma curva simples, fechada, lisa por partes, contida em $\mathcal{D}$ e cujo interior também está em $\mathcal{D}$. Sejam as funções $P = P(x,y)$ e $Q = Q(x,y)$ definidas e contínuas em $\mathcal{D}$, possuindo derivadas parciais primeiras contínuas. Nestas condições vale

$$\oint_{\mathcal{C}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{\mathcal{R}}\!\!\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

onde $\mathcal{R}$ é a região fechada limitada por $\mathcal{C}$.
(a) Calcule

$$\oint_{\mathcal{C}} y\sqrt{xy}\,\mathrm{d}x + x(1+\sqrt{xy})\,\mathrm{d}y,$$

onde $\mathcal{C}$ é uma curva qualquer satisfazendo as condições acima.
(b) Justifique por que o teorema de Green não pode ser aplicado à integral

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

onde $\mathcal{C}$ é o quadrado de vértices em $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$.