

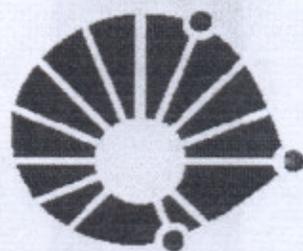
---

EXAME DE SELEÇÃO  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

---

CÓDIGO		NOTA	
--------	--	------	--

A1	
A2	
A3	
A4	



**UNICAMP**

C1	
C2	
C3	
C4	

---

JULHO 2003

---

- A1** Dizer quais dos seguintes conjuntos são subespaços vetoriais de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  e, em caso positivo, dar sua dimensão.
- (a)  $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid AB \text{ é invertível para toda matriz } B \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ invertível}\}$ .
- (b)  $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A - 2A^T = 0\}$ .

**A2** Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Provar que se  $\{u_1, \dots, u_p\}$  é uma base do Núcleo  $A$  e  $\{Av_1, \dots, Av_q\}$  é uma base da Imagem de  $A$  então  $\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$  é uma base do espaço  $\mathbb{R}^n$ .

**A3** Sejam  $u, v \in \mathbb{R}^n$  fixos com  $v \neq 0$ . Provar que

$$u^T v = 0 \quad \text{se e somente se} \quad \|u + \lambda v\| \geq \|u\|, \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R},$$

onde  $\|\cdot\|$  denota a norma euclidiana em  $\mathbb{R}^n$ . Interprete geometricamente.

**A4** Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

(a) Se  $AA^T = A^T A$  então  $A$  é simétrica? Prove ou dê um contra exemplo.

(b) Provar que se  $A = A^T$  então se dois autovalores de  $A$  são diferentes os autovetores associados são ortogonais.

**C1** Seja  $S = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de números reais. Prove ou dê um contra-exemplo para as seguintes afirmações:

(a) Se  $S$  é limitada então  $S$  é convergente.

(b) Se  $S$  não é limitada pode existir uma subsequência de  $S$  que seja convergente. ?

(c) Se  $S$  é monótona crescente e limitada então  $S$  é convergente.

(d) Se  $S$  é limitada e  $\lim \|x_{n+1} - x_n\| = 0$  então  $S$  é convergente.

**C2** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se diz convexa se, para todo  $\lambda \in [0, 1]$  e para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Sejam  $f$  e  $g$  funções convexas. Para cada uma das funções  $h$  definidas abaixo para todo  $x \in \mathbb{R}$ , prove ou dê um contra-exemplo para a seguinte afirmação:  $h$  é convexa.

(a)  $h(x) = \text{máximo} \{f(x), g(x)\}.$

(b)  $h(x) = \text{mínimo} \{f(x), g(x)\}.$

(c)  $h(x) = f(x) \cdot g(x).$

**C3** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável com inversa,  $f^{-1}$ , também diferenciável e crescente. Prove que

$$\int_a^b f^{-1}(y) dy = b f^{-1}(b) - a f^{-1}(a) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(x) dx .$$

**C4** Sejam  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f(0) \geq g(0)$ .

(a) Prove que se existe  $x \in [0, \infty)$  tal que  $f(x) < g(x)$  então existe  $y \in [0, \infty)$  tal que  $f'(y) < g'(y)$ .

(b) A recíproca de (a) é verdadeira? Prove ou dê um contra-exemplo.