EXAME DE SELEÇÃO

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

CÓDIGO		NOTA	

A1	
A2	
A3	
A4	

IMECC

UNICAMP

C1	
C2	
C3	
C4	

JULHO 2003

A1 Dizer quais dos seguintes conjuntos são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^{n\times n}$ e, em caso positivo, dar sua dimensão.

(a) $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid AB$ é invertível para toda matriz $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertível $\}$.

(b) $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A - 2A^T = 0\}$.

$\boxed{\textbf{A2}}$ Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Provar que se $\{u_1, \ldots, u_p\}$ é uma base do Núcleo A e $\{Av_1, \ldots, Av_q\}$ é uma base da Imagem de A então $\{u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q\}$ é uma base do espaço $\mathbb{R}^{n\times n}$.

$\boxed{\textbf{A3}}$ Sejam $u, v \in I\!R^n$ fixos com $v \neq 0$. Provar que

$$u^T v = 0 \quad \text{se e somente se} \quad \|u + \lambda v\| \geq \|u\| \,, \text{ para todo } \lambda \in I\!R \,,$$

onde $\|.\|$ denota a norma euclidiana em $I\!R^n$. Interprete geometric mente.

$\boxed{\textbf{A4}}$ Seja $A \in I\!R^{n\times n}$.

(a) Se $AA^T = A^TA$ então A é simétrica? Prove ou dê um contra exemplo.

(b) Provar que se $A = A^T$ então se dois autovalores de A são diferentes os autovetores associados são ortogonais.

C1 Seja $S = \{x_n\}_{n \in I\!N}$ uma seqüência de números reais. Prove ou dê um contra-exemplo para as seguintes afirmações:

(a) Se S é limitada então S é convergente.

(b) Se S não é limitada pode existir uma subseqüência de S que seja convergente. ?

(c) Se S é monótona crescente e limitada então S é convergente.

(d) Se S é limitada e $\lim \|x_{n+1} - x_n\| = 0$ então S é convergente.

$\boxed{\textbf{C2}}$ A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se diz convexa se, para todo $\lambda \in [0,1]$ e para todo $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\,.$$

Sejam f e g funções convexas. Para cada uma das funções h definidas abaixo para todo $x \in \mathbb{R}$, prove ou dê um contra-exemplo para a seguinte afirmação: $\boxed{h \text{ é convexa}}$.
(a) $h(x) =$ máximo $\{f(x), g(x)\}$.
(b) $h(x) =$ mínimo $\{f(x), g(x)\}$.
(c) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

$\boxed{\textbf{C3}}$ Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável com inversa, f^{-1}, também diferenciável e crescente. Prove que

$$\int_a^b f^{-1}(y)dy = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(x)dx \; .$$

$\boxed{\text{C4}}$ Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(0) \geq g(0)$.

(a) Prove que se existe $x \in [0, \infty)$ tal que $f(x) < g(x)$ então existe $y \in [0, \infty)$ tal que $f'(y) < g'(y)$.

(b) A recíproca de (a) é verdadeira? Prove ou dê um contra-exemplo.